۱۰

نظریهٔ میکروسکوپی مغناطیس

میدان مولکولی درون ماده

مغناطیش ماکروسکوپی یک ماده مغناطیسی از گشتاور دو قطبی مغناطیسی مولکولی (یا مؤلفهٔ آن) ناشی می‌شود، و این گشتاور در پاسخ به میدان موضعی در مکان مولکول، یعنی میدان مولکولی H_m، بوجود می‌آید. میدان مولکولی به میدان خارجی H، و نیز به خود مغناطش بستگی دارد. سهم مربوط به مغناطش، که از میدانهای مغناطیسی دو قطبی همهٔ مولکولهای دیگر ناشی می‌شود، و در قیاس با مورد دی‌الکتریک نتیجهٔ زیر را به دست می‌دهد:

$$H_m = H + \frac{1}{3}M \qquad (۱۰-۱)$$

برای اکثر موارد دیامغناطیسی و پارامغناطیسی، عبارت $\frac{1}{3}M = \frac{1}{3}\chi_m H$ فوق‌العاده کوچک و قابل چشم‌پوشی است، ولی برای اجسام فرومغناطیس این جمله بسیار با اهمیت است.

منشأ دیامغناطیس

همهٔ مولکولها در اثر تغییر شکل توزیع جریان الکترونی در یک میدان مغناطیسی گشتاور دو قطبی مغناطیسی القایی پیدا می‌کنند. پاسخ همیشه طوری است که میدان خارجی را تضعیف می‌کند، یعنی سهم (دیامغناطیسی) مربوط به پذیرفتاری همیشه منفی است. با یک تقریب خطی به پذیرفتاری دیامغناطیسی ثابت می‌رسیم:

$$\chi_m = -\frac{Ne^2\mu_0}{4m_e}\sum_i R_i^2 \qquad (۱۰-۲)$$

خاصیت دیامغناطیس ظاهراً در تمام انواع ماده یافت می‌شود، ولی اثر آن غالباً به وسیلهٔ آثار قوی‌تر پارامغناطیسی یا فرومغناطیسی که می‌توانند با این خاصیت همراه باشند، مخفی می‌شود. خاصیت دیامغناطیس خصوصاً در موادی بارز است که کلاً از اتمها یا یونهایی با پوسته‌های بستهٔ الکترونی تشکیل شده باشند، زیرا در این مورد تمام تأثیرات پارامغناطیسی حذف می‌شوند.

منشأ پارامغناطیس

مولکولهایی که گشتاور دو قطبی دائمی m_0 دارند، یک پاسخ اضافی مربوط به سمتگیری (پارامغناطیس نتیجهٔ این امر است که این گشتاورهای مولکولی تمایل دارند خود را با جهت میدان اعمال شده همسو کنند، درست نظیر مدار جریان که تمایل دارد خود را با میدان همسو کند.) عرضه می‌کنند. مانند مورد مولکولهای قطبی در یک میدان الکتریکی، این پاسخ به طور تقریبی به وسیلهٔ تابع لانژون توصیف می‌شود. جز در نزدیکی صفر مطلق، پذیرفتاری پارامغناطیسی حاصل برابر است با:

$$\chi_m = \frac{N m_0^2 \mu_0}{3kT} \qquad (۱۰-۳)$$

نظریهٔ فرومغناطیس

برای درک فرومغناطیس، فرض می‌شود:

$$H_m = H + \gamma M \qquad (۱۰-۴)$$

که در آن $\gamma \gg \frac{1}{3}$. (این قسمت از یک انرژی مکانیک کوانتومی ناشی می‌شود، که به سمتگیری نسبی گشتاورهای مغناطیسی اسپینی بستگی دارد، این انرژی به انرژی مغناطیسی $H \cdot m_0$ اضافه می‌شود و بنابراین می‌توان آن را برحسب یک میدان مغناطیسی مؤثر توصیف کرد، گرچه منشأ آن الکتروستاتیکی است). در این صورت تا وقتی که T کمتر از دمای کوری باشد، جوابی با $M \neq 0, H = 0$ در این معادله و معادلهٔ لانژون صدق می‌کند.

حتی در دمایی پایین‌تر از دمای کوری، یک قطعهٔ فرومغناطیس با ابعاد ماکروسکوپی ممکن است به خاطر ساختار حوزه‌ای‌اش گشتاور مغناطیسی کل نداشته باشد.

حوزه‌های فرومغناطیسی

جنبه‌های ماکروسکوپی مغناطش در مواد فرومغناطیس به تغییرات در پیکربندی حوزه‌ها مربوط می‌شوند. افزایش مغناطش ناشی از تأثیر یک میدان خارجی با دو فرایند مستقل حاصل می‌شود: افزایش حجم حوزه‌هایی که سمتگیری آنها با میدان مطابقت دارد در مقابل کاهش حجم حوزه‌هایی که سمتگیری آنها مطابق با جهت میدان نیست یا با چرخش مغناطش حوزه به طرف جهت میدان.

در میدان‌های خارجی ضعیف مغناطش معمولاً با حرکت دیوارهٔ حوزه تغییر می‌کند. در مواد خالصی که فقط شامل یک فازند. در ناحیهٔ

Physicsclass.blogsky.com

میدان ضعیف حرکت دیواره تا حدود زیادی برگشت‌پذیر است. در میدان‌های قوی مغناطیدگی با حرکت برگشت‌ناپذیر دیواره و سرانجام با چرخش حوزه انجام می‌شود. در این حالتها وقتی میدان مغناطیسی خارجی حذف شود، ماده به صورت مغناطیده باقی می‌ماند.

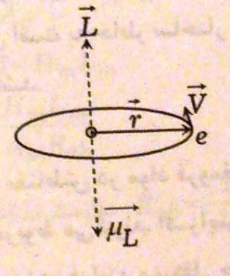
فریتها

برطبق نظریهٔ فرومغناطیس هایزنبرگ، تغییر در اسپین اتمهای مجاور از حالت همسویی موازی به حالت همسویی پادموازی، تغییری در انرژی الکتروستاتیکی به همراه دارد. اگر با این تغییر انرژی اتم‌ها ایجاد همسویی موازی ارجح باشد، و در عین حال اندازهٔ تغییر کافی باشد، ماده متشکل از چنین اتمهای فرومغناطیس است. اگر با این تغییر انرژی ایجاد همسویی پادموازی ارجح باشد، باز هم امکان ایجاد یک ساختار اسپینی منظم وجود دارد، ولی در این مورد در سرتاسر بلور، جهت اسپینها به طور متناوب از اتمی به اتم دیگر تغییر می‌کند. هر ساختار اسپینی منظم با برایند گشتاور مغناطیسی کل صفر را پادفرومغناطیس می‌نامند. ساختار اسپینی منظم شامل هر دو مؤلفه اسپین بالا و اسپین پایین که گشتاور مغناطیسی کل آن در یکی از این جهات مخالف صفر باشد، فری مغناطیس یا به عبارت ساده‌تر فریت نامید.

مسائل فصل دهم

۱۰-۱- مگنتون بور به صورت گشتاور مغناطیسی الکترون در حال گردش در "مدار کلاسیک بور" در اتم هیدروژن، تعریف می‌شود. این مدار، مداردایروی است که با طولی دقیقاً برابر یک طول موج دوبروی که شتاب جذب به مرکز حرکت دایره‌ای آن به وسیلهٔ نیروی جاذبهٔ کولنی تأمین می‌شود. نشان دهید که یک مگنتون بور برابر است با $eh/4\pi m_e$ که در آن m_e جرم الکترون و h ثابت پلانک است.

حل:



$$\vec{\mu}_l=-I\vec{A}\hat{k}\ ,\ I=e\nu\ ,\ A=\pi r^2$$
$$V=r\omega=r2\pi\nu\ \rightarrow\ \nu=\frac{V}{2\pi r}$$

$$\rightarrow \vec{\mu}_l=-\frac{eV}{2\pi r}(\pi r^2)\hat{k}=-\frac{eVr}{2}\hat{k} \qquad (1)$$

و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری الکترون برابراست با:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{V}=rmV\hat{k}=L_z\hat{k} \qquad (2)$$

$$(1),(2)\ \rightarrow\ \vec{\mu}_L=-\frac{eL_z}{2m_e}\hat{k}$$

با توجه به مکانیک کوانتومی می‌دانیم که: $L_z=\hbar m_L$ است، اگر $m_L=1$ را در نظر بگیریم، بنابراین:

$$\vec{\mu}_L=-\frac{eL_z}{2m_e}\hat{k}=-\frac{e\hbar}{2m_e}\hat{k}=-\frac{eh}{4\pi m_e}\hat{k}\ \rightarrow$$

$$\mu_B=\frac{eh}{4\pi m_e}=0/927\times10^{-23}\ (A.m^2)$$

۱۰-۲- مگنتون بور واحد طبیعی اندازه‌گیری گشتاور مغناطیسی اتم است. گشتاور مغناطیسی در هر اتم را برحسب مگنتون بور برای آهن، نیکل، و کبالت در شرایط مغناطش اشباع محاسبه کنید. از داده‌های جدول ۹-۲ استفاده کنید.

حل: اگر گشتاور مغناطیسی هر اتم را m_0 و تعداد اتمها در واحد حجم را N، مغناطش اشباع را μ_s در نظر بگیریم، بنابراین:

$$\mu_s=Nm_0\qquad,\qquad N=N_0\frac{\rho}{M}$$

با جایگذاری مقادیر عددی برای آهن داریم:

$$N=N_0\frac{\rho}{M}=6/02\times10^{23}\left(\frac{atom}{mol}\right)\frac{7/8\times10^{3}\left(\frac{kg}{m^3}\right)}{56\times10^{-3}\left(\frac{kg}{mol}\right)}=$$

$$8/38\times10^{28}\left(\frac{atom}{m^3}\right) \qquad (1)$$

$$\text{جدول}:\ \mu_0 M_s=2/15\ (T) \qquad (2)$$

(۹-۲)

$$(1),(2)\ \rightarrow\ m_0=\frac{M_s}{N}=\frac{\mu_0 M_s}{\mu_0 N}=$$

$$\frac{2/5}{4\pi\times10^{-7}\times8/4\times10^{28}}=2\times10^{-23}\ (A.m^2)$$

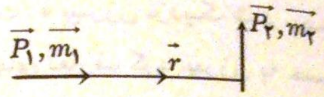
$$\frac{m_0}{\mu_B}=\frac{2\times10^{-23}}{0/9\times10^{-23}}=2/26\ \rightarrow\ (m_0)_{Fe}=2/26\mu_B$$

۱۰-۳- شدت نسبی برهم‌کنش بین دو دوقطبی مغناطیسی را در مقایسه با بر هم‌کنش بین دو دوقطبی الکتریکی محاسبه کنید. به طور مشخص گشتاور نیروی وارد بر یک دوقطبی از طرف دوقطبی دیگر را حساب کنید، وقتی که آن دو عمود بر یکدیگر و به فاصلهٔ یک آنگستروم از یکدیگر قرار گرفته باشند؛ فرض کنید هر دوقطبی مغناطیسی مساوی ۱ مگنتون بور، و هر دوقطبی الکتریکی مساوی $e\times0$ آنگسترم باشد. این محاسبه نشان می‌دهد که مقدار

Physicsclass.blogsky.com

برهم‌کنش مغناطیسی بنیادی در ماده چندین مرتبهٔ بزرگی از برهم‌کنش الکتریکی کوچکتر است.

حل:



گشتاور نیروی وارد بردوقطبی مغناطیسی (۲) از طرف دو قطبی مغناطیسی (۱) برابر است با:

$$\vec{\tau}_۲=\vec{m}_۲\times\vec{B}_۱$$
$$\vec{B}_۱=\frac{\mu_\circ}{۴\pi}\left[\frac{۳\vec{r}\cdot\vec{m}_۱}{r^۵}\vec{r}-\frac{\vec{m}_۱}{r^۳}\right]$$

$$\to\vec{\tau}_۲=\frac{\mu_\circ\hat{k}}{۴\pi}\left[\frac{۳m_۲m_۱}{r^۳}-\frac{m_۲m_۱}{r^۳}\right]=\frac{\mu_\circ\hat{k}}{۴\pi}\left[\frac{۲m_۱m_۲}{r^۳}\right]\quad(۱)$$

گشتاور نیروی وارد بردوقطبی الکتریکی (۲) از طرف دو قطبی الکتریکی (۱) برابر است با:

$$\vec{\tau}_۲=\vec{P}_۲\times\vec{E}_۱=\frac{\hat{k}}{۴\pi\varepsilon_\circ}\left[\frac{۲P_۱P_۲}{r^۳}\right]\quad(۲)$$

$$(۱),(۲)\ \to\ \frac{\tau_m}{\tau_E}=\varepsilon_\circ\mu_\circ\frac{m_۱m_۲}{P_۱P_۲}=\frac{m_۱m_۲}{C^۲P_۱P_۲}$$

$$=\frac{\mu_B^۲}{C^۲e^۲(۰/۱\times۱۰^{-۱۰})^۲}\approx۳/۷\times۱۰^{-۴}$$

۱۰-۴- پذیرفتاری دیامغناطیسی نئون را در دما و فشار متعارف (صفر درجهٔ سلسیوس و یک جوّ فشار) محاسبه کنید. فرض کنید فقط هشت الکترون خارجی در هر اتم در این امر سهیم باشند، و شعاع متوسط مدار این الکترون‌ها $R=۴/۰\times۱۰^{-۹}cm$ باشد.

حل:

پذیرفتاری دیامغناطیسی : $\chi_m=\frac{-Ne^۲\mu_\circ}{۴m_e}\sum_i R_i^۲$

که در آن جمعبندی روی الکترون‌های یک مولکول یا اتم است، برای بدست آوردن N به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$PV=nR\Gamma\Rightarrow P=\frac{N'}{V}k\Gamma=Nk\Gamma\Rightarrow N=\frac{P}{k\Gamma}$$

$$N=\frac{۱۰^۵(pa)}{(۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳})\times۲۷۳(k)}=۲/۶۵\times۱۰^{۲۵}\left(\frac{atom}{m^۳}\right)$$

بنابراین:

$$\chi_m=-\frac{Ne^۲\mu_\circ}{۴m_e}\sum_i R_i^۲=-\frac{Ne^۲\mu_\circ}{۴m_e}(۸R^۲)$$

$$=-\frac{(۲/۶۵\times۱۰^{۲۵})\times(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^۲\times۴\pi\times۱۰^{-۷}}{۴\times(۹/۱\times۱۰^{-۳۱})}$$

$$=(۸\times(۴\times۱۰^{-۱۱})^۲)\approx۳\times۱۰^{-۹}$$

۱۰-۵- مغناطش یک جسم فرومغناطیس در دمای کوری به صفر می‌رسد. در شکل ۲-۱۰ دمای کوری با خط راستی که در مبدأ مختصات بر تابع لانژون مماس است نمایش داده می‌شود. با استفاده از مقدار تجربی دمای کوری برای آهن، γی آهن را تعیین کنید.

حل:

رابطهٔ (۱۰-۱۹): $M=Nm_\circ\left[\coth y-\frac{۱}{y}\right]$

با بسط $\coth y$ برای yها کوچک (مسئله ۵-۴) داریم:

$$M\approx Nm_\circ\left[\frac{۱}{۳}y+\frac{۱}{y}-\frac{۱}{y}\right]=\frac{Nm_\circ}{۳}y\quad(۱)$$

رابطهٔ (۱۰-۲۰): $M=\frac{kTy}{\gamma\mu_\circ m_\circ}\ (۲)$

در دمای کوری، T_C، این دو خط روی هم می‌افتند، بنابراین:

$$(۱),(۲)\to\frac{Nm_\circ}{۳}=\frac{kT_C}{\gamma\mu_\circ m_\circ}\to\gamma=\frac{۳kT_C}{N\mu_\circ m_\circ^۲}$$

مغناطش اشباع: $M_s=Nm_\circ$

$$\gamma=\frac{۳kT_cN\mu_\circ}{\mu_\circ^۲M_s^۲}\quad(۳)$$

جدول (۹-۲): $(\mu_\circ M_s)_{Fe}=۲/۱۵\ T$

$(T_c)_{Fe}=۱۰۴۳\ (k)$

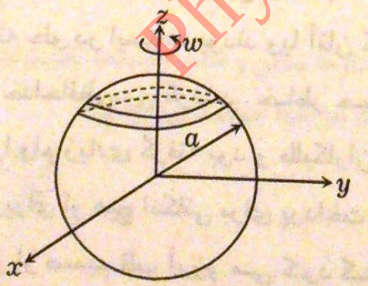
مسئله (۱۰-۲): $(N)_{Fe}=۸/۴\times۱۰^{۲۸}\ \left(\frac{atom}{m^۳}\right)$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۳) داریم:

$$\gamma=\frac{۳(۱/۳۸\times۱۰^{-۲۳})(۱۰۴۳)(۸/۴\times۱۰^{۲۸})(۴\pi\times۱۰^{-۷})}{(۲/۱۵)^۲}\approx۹۸۶$$

۱۰-۶- طبق تعریف نسبت ژیرومغناطیسی یک توزیع جریان عبارت است از نسبت گشتاور مغناطیسی به اندازهٔ حرکت زاویه‌ای آن. نسبت ژیرومغناطیسی کره‌ای به جرم M و بار Q را محاسبه کنید. فرض کنید کره با سرعت زاویه‌ای w حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد، می‌چرخد و جرم آن به طور یکنواخت در سراسر حجم، و بار الکتریکی آن به طور یکنواخت در سطح توزیع شده است.

حل:



physicsclass.blogsky.com

$\frac{m}{L}=$ نسبت ژیر و مغناطیس

با توجه به مسئلهٔ (۸-۲۸)، مقدار گشتاور مغناطیسی توزیع بار سطحی روی کرهٔ چرخان با چگالی $\sigma=\frac{Q}{4\pi a^2}$ برابر است با:

$$m=\frac{4\pi}{3}\sigma w a^4=\frac{Q w a^2}{3} \quad (1)$$

برای محاسبهٔ اندازه حرکت زاویه‌ای به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}=\vec{r}\times m\vec{V} \rightarrow d\vec{L}=\vec{r}\times dm\vec{V}$$

$$dm=\rho dV \quad , \rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3}=\frac{3M}{4\pi a^3}$$

$$\vec{r}\times\vec{V}=\vec{r}\times[\vec{w}\times\vec{r}]=r\hat{r}\times[w\hat{k}\times r\hat{r}]=\times\hat{\varphi}$$

$$r^2 w\hat{r}\times[\hat{k}\times\hat{r}]=r^2 w\sin\theta\hat{r}$$

با استفاده از تجزیهٔ بردارهای یکهٔ قطبی کروی در دستگاه دکارتی داریم:

$$\hat{r}=\sin\theta\cos\varphi\hat{i}+\sin\theta\sin\varphi\hat{j}+\cos\theta\hat{k}$$

$$\hat{\varphi}=-\sin\varphi\hat{i}+\cos\varphi\hat{j}$$

$$\hat{r}\times\hat{\varphi}=\sin\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\hat{k}-\cos\theta(\sin\varphi\hat{j}+\cos\varphi\hat{i})$$

$$\vec{L}=\frac{3M}{4\pi a^3}w\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^2\sin\theta(\sin\theta\hat{k})r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr+0$$

$$=\frac{3M}{4\pi a^3}w\left(\frac{2\pi a^5}{5}\right)\hat{k}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\, d\theta=\frac{2Ma^2 w}{5}\hat{k} \quad (2)$$

به صورت زیر می‌توان به همین نتیجه دست یافت:

$$L_z=Iw$$

$$I=\frac{2}{5}Ma^2 \quad \text{(گشتاور لختی کره نسبت به یک قطر آن)}$$

$$(1),(2)\rightarrow \frac{m}{L}=\frac{5Q}{6M}$$

Physicsclass.blogsky.com

۱۵

خواص الکترومغناطیسی ابر رسانا

ابر رساناها رده نسبتاً بزرگی از مواد را تشکیل می‌دهند که در دماهای کم، معمولاً کمتر از $20k$ گذار فازی به حالت ابر رسانایی دارند. این گذار علاوه بر بستگی به دما به میدان مغناطیسی نیز بستگی دارد، و در میدانهای شدیدتر از میدان بحرانی H_C ماده به حالت معمولی بر می‌گردد. به طور ایده‌آل

$$H_C = H_0\left[1-\left(\frac{T}{Tc}\right)^2\right] \qquad (1-15)$$

رفتار الکتریکی و مغناطیسی در حالت ابر رسانایی را به ساده‌ترین وجه می‌توان توسط معادلات ساختمندی $\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \vec{J} = g\vec{E}$ توصیف کرد که درآن‌ها پارامترهای مواد، مقادیر فرین زیر را دارند

$$g = 0 \quad , \quad \chi_m = -1 \quad (\mu_0 = 0) \qquad (2-15)$$

این مقادیر، رسانندگی کامل و خاصیت دیامغناطیسی کامل را نشان می‌دهند. خاصیت دیامغناطیسی کامل ایجاب می‌کند که در درون ابر رسانا چگالی شار $\vec{B}$ و چگالی جریان $\vec{J}$ هر دو صفر باشند و جریانهای ابر رسانایی در سطح جاری باشند. معادلات لندن توصیف دقیق‌تری به دست می‌دهند در این معادلات، معادلات خطی ساختمندی با معادلات دیفرانیسیل زیر جایگزین می‌شوند

$$\mu_0 \vec{j} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \vec{E} \quad , \mu_0 \vec{\nabla}\times\vec{J} = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \vec{B}$$

از این معادلات، همراه با معادلات ماکسول در خلأ، چنین نتیجه می‌شود که چگالی شار و چگالی جریان در درون ابر رسانا به جای آنکه به طور ناگهانی به صفر نزول کنند، بافاصله از سطح به طور نمایی با عمق نفوذ λ کاهش می‌یابند.

برای مسائلی که در آنها ابر رسانا در میدان مغناطیسی واقع است، فرمولبندی ساده $\mu = 0 \,, \chi_m = -1$ بسیار مناسب است. نتایج با آنچه توسط روشهای فصل ۹ به‌دست آمد، تنها با جایگزین کردن $\mu = 0$، یکسان است.

در یک فرمولبندی مشابه، که می‌تواند برای مسائلی شامل ابر رساناهای حامل جریان خارجی مناسب‌تر باشد، فرض می‌شود که در داخل ابررسانا $\mu = \mu_0 , \chi_m = 0$ شرط $\vec{B} = 0$ با قرار دادن $\vec{H} = 0 = \vec{M}$ در داخل ابر رسانا برقرار می‌شود، و شرایط مرزی با این فرض که جریانهای ابررسانایی مناسبی در سطح ابر رسانا جریان دارند برآورده می‌شوند. این دو فرمولبندی با یکدیگر معادل‌اند، ولی در یک مسئله مفروض تنها یکی از آن دو باید انتخاب و دنبال شود.

مسائل فصل پانزدهم

۱۵ – ۱ – استوانه‌ای ابررسانای بی‌نهایت به شعاع a را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی عرضی قرار گرفته است. در فواصل دور از استوانه میدان یکنواخت و اندازه‌اش B_0 است. (الف)میدانها را در داخل و در خازج استوانه و (ب) چگالی جریان را در داخل استوانه و روی سطح آن محاسبه کنید. فرض کنید که خواص ابررسانایی توسط خاصیت دیامغناطیسی کامل و رسانندگی کامل توصیف می‌شوند. دو فرمولبندی معادل را مقایسه کنید.

حل: محور استوانه را در راستای محور Zها و میدان اولیه $\vec{B}_0$ را در راستای محور xها درنظر می‌گیریم. برای خارج و داخل استوانه به ترتیب داریم:

خارج استوانه : $r \to \infty \quad \vec{B} = B_0 \hat{i}$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \;,\; \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi^*_{out} \end{array}\right| \Rightarrow \nabla^2 \varphi^*_{out} = 0$$

داخل استوانه : $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{M}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi^*_{in}$$

در داخل استوانهٔ ابر رسانا هیچگونه قطب مغناطیسی وجود ندارد، بنابراین:

$$\vec{\nabla}.\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{H} = 0 \quad \overset{\vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi^*_{in}}{\Longrightarrow} \quad \nabla^2 \varphi^*_{in} = 0$$

با توجه به تقارن مسئله φ به Z بستگی ندارد، بنابراین

$$\nabla^2 \varphi^*(r,\theta) = 0 \Rightarrow \varphi^*(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos(n\theta)$$

Physicsclass.blogsky.com

$$+B_n \sin(n\theta))r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (A'_n \cos(n\theta) + B'_n \sin(n\theta))r^{-n}$$

و با توجه به اینکه وقتی $r \to \infty$ آنگاه $\varphi^*_{out} \to \frac{-B_\circ}{\mu_\circ} r\cos\theta$ می‌شود،

بنابراین می‌توان φ^* را در داخل و خارج به صورت زیر نوشت:

$$\varphi^*_{out} = \frac{-B_\circ}{\mu_\circ} r\cos\theta + \frac{A'_1}{r}\cos\theta$$

$$\varphi^*_{in} = A_2 r\cos\theta$$

با اعمال شرایط مرزی حاکم بر مسئله می‌توان ضرایب A_2, A'_1 را بدست آورد:

$$B_{1n}\big|_{r=a} = B_{2n}\big|_{r=a} \Rightarrow (B_r)_{out}\big|_{r=a} = (B_r)_{in}\big|_{r=a}$$

$$\vec{B}_{in} = \circ \Rightarrow (B_r)_{out}\big|_{r=a} = \circ$$

$$-\mu_\circ \frac{\partial\varphi^*_{out}}{\partial r}\Big|_{r=a} = \circ \Rightarrow -\frac{B_\circ}{\mu_\circ}\cos\theta - \frac{A'_1}{a^2}\cos\theta = \circ$$

$$\Rightarrow A'_1 = \frac{-B_\circ a^2}{\mu_\circ}$$

$$H_{1t}\big|_{r=a} = H_{2t}\big|_{r=a} \Rightarrow (H_\theta)_{out}\big|_{r=a} = (H_\theta)_{in}\big|_{r=a}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*_{out}}{\partial\theta}\Big|_{r=a} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^*_{out}}{\partial\theta}\Big|_{r=a} - \frac{2B_\circ}{\mu_\circ}\sin\theta$$

$$= A_2 \sin\theta \Rightarrow A_2 = \frac{-2B_\circ}{\mu_\circ}$$

بنابراین میدان در داخل و خارج به صورت زیر است:

داخل:

$$\vec{B} = \circ, \vec{H} = -\vec{\nabla}\varphi^*_{in} = \frac{2B_\circ}{\mu_\circ}\hat{i}\ ,\ \vec{M} = -\vec{H} = \frac{-2B_\circ}{\mu_\circ}\hat{i}$$

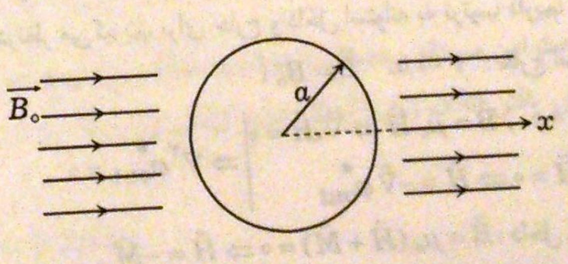
خارج:

$$\vec{B} = \mu_\circ \vec{H} = -\mu_\circ \vec{\nabla}\varphi^*_{out} = B_\circ\hat{i} - B_\circ\frac{a^2}{r^2}(\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)$$

و چگالی سطحی در سطح استوانه به صورت زیر بدست می‌آید:

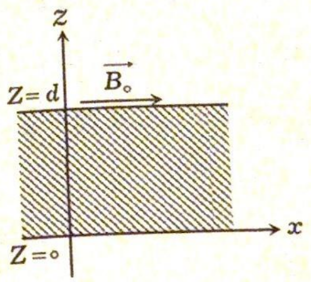
$$j_M = \hat{n}\times[\vec{M}_{out} - \vec{M}_{in}] = \hat{n}\times[\circ - \vec{M}_{in}] = \hat{r}\times[-\vec{M}_{in}]$$

$$= \frac{-2B_\circ}{\mu_\circ}\sin\theta\,\hat{k}$$



۱۵ - ۲ - تیغهٔ ابررسانای بی‌نهایت بزرگی به ضخامت d را در نظر بگیرید که دو سطح آن در $z=\circ$ و $z=d$ قرار دارند. در خارج از تیغه میدان مغناطیسی یکنواخت و موازی با سطوح آن است، $B_x = B_\circ$. با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی λ، میدان و چگالی جریان را در داخل تیغه به دست آورید.

حل:



$$\vec{B}_{out} = B_\circ\hat{i}$$

و بدلیل تقارن حاکم بر مسئله، میدان در داخل بره ابررسانا فقط به Z بستگی دارد و فقط دارای مؤلفه x است، بنابراین:

$$\vec{B}_{in} = B(Z)\hat{i}$$

$$\text{معادله لندن}: \nabla^2\vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} \Rightarrow \frac{d^2 B}{dZ^2} = \frac{1}{\lambda^2}B(Z)$$

$$B(Z) = Ae^{\frac{z}{\lambda}} + Be^{\frac{-z}{\lambda}}$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$B_{in}(z=\circ) = B_{out}(z=\circ) \Rightarrow A + B = B_\circ$$

$$B_{in}(z=d) = B_{out}(z=d) \Rightarrow Ae^{\frac{d}{\lambda}} + Be^{-\frac{d}{\lambda}} = B_\circ$$

$$A = \frac{B_\circ(-1+e^{\frac{-d}{\lambda}})}{e^{\frac{d}{\lambda}} - e^{\frac{-d}{\lambda}}}\ ,\ B = \frac{B_\circ(1-e^{\frac{d}{\lambda}})}{e^{\frac{-d}{\lambda}} - e^{\frac{d}{\lambda}}}$$

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_\circ}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_\circ}\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B(z) & \circ & \circ \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_\circ}\frac{dB(z)}{dz}\hat{j}$$

$$\vec{J}_s = \frac{1}{\mu_\circ}\left[\frac{A}{\lambda}e^{\frac{z}{\lambda}} - \frac{B}{\lambda}e^{-\frac{z}{\lambda}}\right]\hat{j}$$

۱۵ - ۳ - با استفاده از معادلات لندن و عمق نفوذ پدیده شناختی λ، محاسبات مسئله ۱۵-۱ را انجام دهید.

حل: با توجه به مسئله (۱۵-۱) در اینجا فرض می‌کنیم میدان در خارج استوانه به صورت زیر باشد:

$$\vec{B}_{out} = B_\circ\hat{i} - b\left(\frac{a}{r}\right)^2(\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta)$$

و میدان در داخل استوانه را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$B_r = u(r)\cos\theta\ ,\ B_\theta = V(r)\sin\theta$$

دو تا پیچ $V(r), u(r)$ باید به گونه‌ای تعیین شوند که معادله لندن و شرایط مرزی را برآورده نمایند. با توجه به شرایط مرزی داریم:

$$(B_r)_{out}\big|_{r=a} = (B_r)_{in}\big|_{r=a} \Rightarrow (B_\circ - b)\cos\theta = u(a)\cos\theta$$

$$\Rightarrow B_\circ - b = u(a)$$

$$(B_\theta)_{out}\big|_{r=a} = (B_\theta)_{in}\big|_{r=a} \Rightarrow -(B_\circ + b)\sin\theta = V(a)\sin\theta$$

$$\Rightarrow -B_\circ - b = V(a) \quad *$$

و با توجه به معادله لندن داریم:

Physicsclass.blogsky.com

معادله لندن : $\nabla^{2}\vec{B}=\frac{1}{\lambda^{2}}\vec{B}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^{2}\vec{B}\ ,\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{\vec{B}}{\lambda^{2}}\ **$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u\cos\theta & rV\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r}\left[(V+r\frac{dV}{dr})\sin\theta+u\sin\theta\right]\hat{k}=(\frac{V}{r}+\frac{dV}{dr}+\frac{u}{r})\sin\theta\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \left[\frac{V}{r}+\frac{dV}{dr}+\frac{u}{r}\right]\sin\theta\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\hat{r}}{r}\left[\frac{V}{r}+\frac{dV}{dr}+\frac{u}{r}\right]\cos\theta-\hat{\theta}\left[\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}-\frac{V}{r^{2}}+\frac{d^{2}V}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^{2}}\right]\sin\theta$$

$$\overset{**}{=}-\frac{\vec{B}}{\lambda^{2}}=\frac{-1}{\lambda^{2}}\left[u\cos\theta\,\hat{r}+V\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

بنابراین:

$$\frac{V}{r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}+\frac{u}{r^{2}}=\frac{-u}{\lambda^{2}} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}-\frac{V}{r^{2}}+\frac{d^{2}V}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{r^{2}}=\frac{V}{\lambda^{2}} \qquad (2)$$

معادله (۱) را در r ضرب کرده، از آن مشتق گرفته و آن را از معادله (۲) کم می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$V=-(u+r\frac{du}{dr}) \qquad (3)$$

با جایگذاری در رابطه (۲) داریم:

$$\frac{d^{2}u}{dr^{2}}+\frac{3}{r}\frac{du}{dr}-\frac{u}{\lambda^{2}}=0$$

با تغییر متغیر $t=ur$، خواهیم داشت:

$$\frac{d^{2}}{dr^{2}}(\frac{t}{r})+\frac{3}{r}\frac{d}{dr}(\frac{t}{r})-\frac{1}{\lambda^{2}}(\frac{t}{r})=0$$

$$\Rightarrow\frac{d^{2}t}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{dt}{dr}-(\frac{1}{\lambda^{2}}+\frac{1}{r^{2}})t=0$$

و با تغییر متغیر $x=\frac{r}{\lambda}$، داریم:

$$\frac{d^{2}t}{dx^{2}}+\frac{1}{x}\frac{dt}{dx}-(1+\frac{1}{x^{2}})t=0$$

که جواب این معادله، تابع بسل تغییر یافته نوع اول و مرتبه اول است:

$$t(r)=CI_{1}(x)=CI_{1}(\frac{r}{\lambda})\Rightarrow u=\frac{t}{r}=\frac{C}{r}I_{1}(\frac{r}{\lambda}) \qquad (4)$$

$$(3),(4)\Rightarrow V=-\frac{C}{\lambda}I_{1}'(\frac{r}{\lambda}) \qquad (5)$$

با توجه به نتایج بالا و روابطی که از شرایط مرزی بدست آمده، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{C}{a}I_{1}(\frac{a}{\lambda})=u(a)=B_{0}-b\\ \frac{-C}{\lambda}I_{1}'(\frac{a}{\lambda})=V(a)=-B_{0}-b\end{array}\right\}\Rightarrow C=\frac{2B_{0}}{\frac{1}{a}I_{1}(\frac{a}{\lambda})+\frac{1}{\lambda}I_{1}'(\frac{a}{\lambda})}$$

$$b=\frac{\frac{a}{\lambda}I_{1}'(\frac{a}{\lambda})B_{0}-I_{1}(\frac{a}{\lambda})B_{0}}{\frac{a}{\lambda}I_{1}'(\frac{a}{\lambda})+I_{1}(\frac{a}{\lambda})}$$

و بنابراین:

$$\overrightarrow{B_{in}}=(u(r)\cos\theta)\,\hat{r}+(V(r)\sin\theta)\,\hat{\theta}$$

۱۵ – ۴ – کرهٔ ابررسانایی به شعاع a را در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی قرار گرفته و این میدان در فواصل دور از کرهٔ یکنواخت و اندازه‌اش B_0 است. با استفاده از فرمولبندی مثال ۱۵–۳ به عنوان مبنا، مطالب زیر را فراهم آورید: (الف) بسطی برای $\nabla\times\nabla\times B$ و از آن معادلاتی را که مؤلفه‌های B در داخل کره در آن صدق می‌کنند. (ب) اثباتی برای معادلهٔ (۱۵–۲۷). (ج) یک بحث کمی درباره کاهش نمایی B در ناحیه نزدیک به سطح کره.

حل: الف) میدان مغناطیسی در داخل کره را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{B}=B_{r}\hat{r}+B_{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{r^{2}\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ B_{r} & rB_{\theta} & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{r\sin\theta}{r^{2}\sin\theta}\hat{\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta})-\frac{\partial}{\partial\theta}(B_{r})\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta})-\frac{\partial}{\partial\theta}(B_{r})\right]\hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{r^{2}\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\hat{\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ 0 & 0 & \frac{r\sin\theta}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta})-\frac{\partial}{\partial\theta}(B_{r})\right]\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\hat{r}}{r^{2}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta})-\frac{\partial}{\partial\theta}(B_{r})\right]\right]$$

$$-\frac{r\hat{\theta}}{r^{2}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sin\theta\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta})-\frac{\partial}{\partial\theta}(B_{r})\right]\right] \qquad (1)$$

با فرض میدان B به صورت زیر:

$$\begin{array}{l}B_{r}=U(r)\cos\theta\\ B_{\theta}=V(r)\sin\theta\end{array} \qquad (2)$$

و با توجه به معادلهٔ لندن می‌توان معادلات مورد نظر را به صورت زیر بدست آورد:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=-\frac{1}{\lambda^{2}}\vec{B} \qquad (3)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_{\theta})-\frac{\partial}{\partial\theta}(B_{r})\right]$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial r}(rV\sin\theta)-\frac{\partial}{\partial\theta}(U\cos\theta)\right]$$

Physicsclass.blogsky.com

(۴) $$=\sin\theta\left[V+r\frac{dV}{dr}+U\right]$$

$$(1),(3),(4)\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin^2\theta(V+r\frac{dV}{dr}+U)\right]=-\frac{1}{\lambda^2}U\cos\theta\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sin^2\theta(V+r\frac{dV}{dr}+U)\right]=\frac{1}{\lambda^2}V\sin\theta\end{cases}$$

با ساده کردن این معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{r\,dV}{dr}+V=-(1+\frac{r^2}{\lambda^2})U\\ \frac{r^2d^2V}{dr^2}+2r\frac{dV}{dr}+r\frac{dU}{dr}=\frac{r^2}{\lambda^2}V\end{cases}$$

۱۵-۵- یک سیم بلند و مستقیم ابررسانا به شعاع ۲۰ میلی‌متر حامل جریان است. (الف) میدان مغناطیسی روی سطح سیم چیست؟ (ب) مقدار جریان I را که شار مغناطیسی ناشی از آن بتواند به درون سیم نفوذ کند، چنانچه جنس آن از Pb، Ta یا Nb در $4/2K$ باشد، محاسبه کنید.

حل: میدان در داخل سیم حامل جریان برابر است با:

$$B_\theta=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\frac{J_1(\frac{ir}{\lambda})}{J_1(\frac{ia}{\lambda})}$$

الف)

$$\vec J=\frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\times\vec B=\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\hat r & r\hat\theta & \hat k\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & rB_\theta & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{r\mu_0}(\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta))\hat k$$

$$=\frac{I_0\hat k}{(2\pi a)\,r\,J_1(\frac{ia}{\lambda})}\left[J_1(\frac{ir}{\lambda})+r\frac{i}{\lambda}J_1'(\frac{ir}{\lambda})\right]$$

ب) برای $x>>1$، تابع بسل تغییر یافته به صورت زیر می‌آید:

(۱) $$I_1(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1+O(\frac{1}{x})\right]\xrightarrow{x>>1}I_1(x)\approx\frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

و با توجه به $J_1(\frac{ir}{\lambda})=iI_1(\frac{r}{\lambda})$، داریم:

$$B_\theta=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\frac{I_1(\frac{r}{\lambda})}{I_1(\frac{a}{\lambda})}$$

بنابراین، برای $\lambda<<a$ و $\lambda<<r$ داریم:

$$B_\theta=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\frac{\frac{e^{\frac{r}{\lambda}}}{\sqrt{\frac{r}{\lambda}}}}{\frac{e^{\frac{a}{\lambda}}}{\sqrt{\frac{a}{\lambda}}}}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\frac{\frac{1}{\sqrt r}}{\frac{1}{\sqrt a}}e^{\frac{r-a}{\lambda}}$$

با درنظر گرفتن $a\simeq r$, $a-r=\delta$ خواهیم داشت:

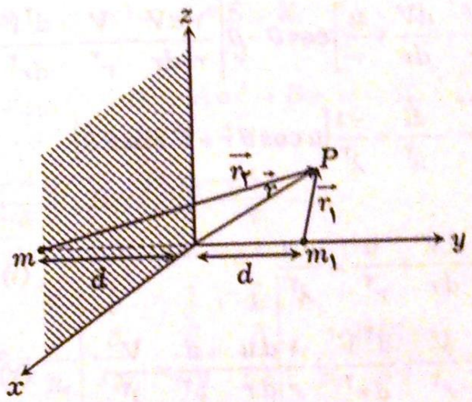
$$B_\theta=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}e^{-\frac{\delta}{\lambda}}$$

در واقع $\vec B$ در ناحیه نزدیک به سطح استوانه به طور نمایی کاهش می‌یابد.

۱۵-۶- یک دوقطبی مغناطیسی به فاصله d بالای یک تیغهٔ ابررسانا و به موازات تیغه قرار دارد. (برای سادگی فرض کنید تیغه در ابعاد عرضی بی‌نهایت گسترده است.) (الف) ابررسانا را به صورت یک مادهٔ مغناطیسی با $\chi_m=-1$ در نظر بگیرید و دوقطبی تصویری (یا دسته‌ای از دوقطبیهای تصویری را بیابید که موجب ارضای شرایط مرزی در فصل مشترک بین ماده و هوا بشود.) [به مسئلهٔ ۹-۱۵(ب) نیز رجوع کنید]. (ب) نیروی مغناطیسی وارد بر دوقطبی را محاسبه کنید. (ج) اگر جرم دوقطبی m_D باشد، در چه فاصله d نیروی مغناطیسی با نیروی وزن دوقطبی در توازن خواهد بود.

حل: میدان مغناطیسی حاصل از یک دو قطبی در فاصلهٔ (r) از آن:

$$\vec B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{-\vec m}{r^3}+\frac{3(\vec m.\vec r)\vec r}{r^5}\right]$$



با توجه به شکل میدان مغناطیسی در نقطه P (فرض می‌کنیم P در صفحهٔ zy است) به صورت زیر است:

$$\vec B(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[(\frac{-\vec m_1}{r_1^3}+\frac{3(\vec m_1.\vec r_1)\vec r_1}{r_1^5})+(\frac{-\vec m_2}{r_2^3}+\frac{3(\vec m_2.\vec r_2)\vec r_2}{r_2^5})\right]$$

$$\vec m_1=m_1\hat i\quad,\quad \vec r_1=r_{1y}\hat j+r_{1z}\hat k\ \Rightarrow\ \vec m_1.\vec r_1=0$$

$$\vec m_2=m_{2x}\hat i+m_{2y}\hat j+m_{2z}\hat k\quad,\quad \vec r_2=r_{2y}\hat j+r_{2z}\hat k$$

$$\Rightarrow\ \vec m_2.\vec r_2=m_{2y}r_{2y}+m_{2z}r_{2z}$$

بنابراین:

$$\vec B=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{-m_1\hat i}{r_1^3}+\frac{-\vec m_2}{r_2^3}+\frac{3(m_{2y}r_{2y}+m_{2z}r_{2z})}{r_2^5}(r_{2y}\hat j+r_{2z}\hat k)\right]$$

در داخل ابر رسانا $\chi_m=-1\ \Leftarrow\ \mu=\mu_0(1+\chi_m)=0$

با اعمال شرایط مرزی می‌توان مقدار و جهت $\vec m_2$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$r_1=r_2\ \Rightarrow\ B_n=0\ \Rightarrow\ \vec B.\hat j=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{-\vec m_2.\hat j}{r_2^3}+\frac{3(m_{2y}r_{2y}+m_{2z}r_{2z})}{r_2^5}r_{2y}=0$$

(۱) $$\Rightarrow\ \frac{-m_{2y}}{\ }+\frac{3(m_{2y}r_{2y}+m_{2z}r_{2z})}{\ }r_{2y}=0$$

Physicsclass.blogsky.com

$$B_t=0 \Rightarrow \vec{B}.\hat{i}=0$$

$$\Rightarrow \frac{-m_1}{r_1^3}-\frac{m_{2x}}{r_2^3}=0 \xRightarrow{(r_1=r_2)} m_{2x}=-m_1 \qquad (2)$$

$$\vec{B}.\hat{k}=0 \Rightarrow \frac{-m_{2z}}{r_2^3}+\frac{3(m_{2y}r_{2y}+m_{2z}r_{2z})}{r_2^5}r_{2z}=0 \qquad (3)$$

با ساده کردن روابط به دست آمدهٔ (۱) و (۲) و (۳) در مرز خواهیم داشت:

$$m_{2x}=-m_1 \quad , \quad m_{2y}=0 \quad , \quad m_{2z}=0$$

در واقع $\vec{m}_2$ در فاصه d در طرف دیگر صفحه و در خلاف جهت آن است.

ب)

$$U=\vec{m}_1.\vec{B}_2=m_1\hat{i}.\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{+m_2\hat{i}}{y^3}+\frac{3(\vec{m}_2.\vec{r})\vec{r}}{y^5}\right)\right]\overset{\vec{r}=y\hat{j}}{=\!=}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m_2m_1}{y^3}$$

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}U \Rightarrow \vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial y}\hat{j}=-\frac{\mu_0}{4\pi}m_1m_2\left(\frac{-3}{y^4}\right)\hat{j}$$

$$\vec{F}(y=2d)=\frac{\mu_0}{4\pi}m_1m_2\left(\frac{3}{16d^4}\right)\hat{j}$$

ج)

$$F=m_Dg \Rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}m_1m_2\left(\frac{3}{16d^4}\right)=m_Dg \Rightarrow d=\left[\frac{3\mu_0 \ m_1m_2}{64\pi \ m_Dg}\right]^{\frac{1}{4}}$$

۱۵-۷ نفوذ "نمایی" میدان مغناطیسی به درون سیم استوانه‌ای باشعاع 5λ (شکل ۱۵-۳) را با نتیجهٔ مربوط به وضعیت هندسی یک‌بعدی تیغهٔ بی‌نهایت مقایسه کنید. برای استوانه از پاسخ تابع بسل بر پایه $I_1(r/\lambda)$ استفاده کنید.

حل:

۱۵-۷ با توجه به شعاع استوانه 5λ و رابطه‌ی میدان مغناطیسی داریم:

$$B=\frac{\mu_0I_0}{2\pi a}\frac{J_1\left(\frac{ir}{\lambda}\right)}{J_1\left(\frac{ia}{\lambda}\right)}=\frac{\mu_0I_0}{2\pi a}\frac{J_1\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{J_1\left(\frac{a}{\lambda}\right)}$$

حال اگر به جای $a=5\lambda$ قرار دهیم داریم:

$$B_0=\frac{\mu_0I_0}{2\pi a} \rightarrow \frac{B}{B_0}=\frac{I_1\left(\frac{0}{\lambda}\right)}{I_1(5)}$$

x	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
۰	۰	۰/۵۶۲۵	۱/۵۹۱	۳/۹۵۳	۹/۷۵۹	۲۴/۳۴	۶۱/۳۴

$$\rightarrow I_1(x)=I_1(5)=24/34$$

$\frac{B}{B_0}$	۰	۰/۲۳	۰/۰۶۵	۰/۱۶۲	۰/۴۰۱	۱
$\frac{r}{\lambda}$	۰	۱	۲	۳	۴	۵

Physicsclass.blogsky.com

۱۶

معادلات ماکسول

تعمیم قانون آمپر: جریان جابه‌جایی

در فصل ۹ دیدیم که میدان مغناطیسی ناشی از توزیع جریان، در قانون مداری آمپر صدق می‌کند:

$$\oint_C \vec{H}.\vec{dl}=\int \vec{J}.\hat{n}da \qquad (۱-۱۶)$$

می‌توان نشان داد که این قانون گاهی با شکست روبه‌رو می‌شود، بنابراین برای آن تعمیمی پیدا می‌کنیم که همیشه معتبر باشد. با درنظر گرفتن قانون آمپر دیفرانسیلی و با استفاده از قانون گاوس می‌توان قانون آمپر را تغییر داد و آن را به صورت زیر نوشت:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (۲-۱۶)$$

و مشتق زمانی $\vec{D}$ را به عنوان جریان جابه‌جایی اطلاق کنیم.

در فصلهای قبل ما از جریان جابه‌جایی چشم‌پوشی کردیم. این چشم‌پوشی به خاطر یکی از سه دلیل زیر امکان‌پذیر بود: میدانها نسبت به زمان ثابت بودند و نتیجتاً مشتقهای زمانی صفر بودند، مواد رساناهای الکتریکی خوبی بودند به طوریکه جریان جابه‌جایی در مقایسه با جریان رسانش کوچک بود، یا آنکه جریان جابه‌جایی محدود به ناحیه کوچکی از فضا می‌شد که لازم نبود به طور صریح درنظر گرفته شود (مثلاً در خازنها).

معادلات ماکسول و مبانی تجربی آنها

این فصل حاوی مبانی نظریه الکترومغناطیس کلاسیک است.

معادلات ماکسول معادلات دیفرانسیلی هستند که (همراه با شرایط مرزی برای هر وضعیت خاص) میدانهای تولید شده به وسیله چشمه‌های بار و جریان را تعیین می‌کنند.

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \qquad (۳-۱۶)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (۴-۱۶)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=P \qquad (۵-۱۶)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0 \qquad (۶-۱۶)$$

هر کدام از این معادلات نماینده تعمیم یک دسته از مشاهدات تجربی‌اند: معادله (۱۶-۳) تعمیم قانون آمپر است، معادله (۱۶-۴) صورت دیفرانسیلی قانون الکترو مغناطیسی فاراده است، معادله (۱۶-۵) تعمیم قانون گاوس است که خود از قانون کولن نتیجه می‌شود، معادله (۱۶-۶) را معمولاً می‌گویند نماینده این واقعیت است که هرگز قطب تنهای مغناطیسی مشاهده نشده است.

معادلات ماکسول را می‌توان تقریباً در کلیه وضعیتهای ماکروسکوپی به کاربرد. اگر موادی موجود باشند، برای آنکه بتوانیم معادلات ماکسول را به کار بریم، باید معادلات ساختمندی مناسب را نیز بدانیم (یا به طور تجربی و یا از نظریه میکروسکوپی مربوط به ماده نوع به خصوص).

وقتی معادله نیروی لورنتس، $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$، که اثر میدانها بر روی ذرات باردار را توصیف می‌کند، با این معادلات جفت شود، این مجموعه قوانین توصیف کلاسیکی کاملی برای ذرات با برهم کنش الکترومغناطیسی فراهم می‌آورد.

دیدیم که جریان جابه‌جایی که در بخش قبل معرفی شد برای آنکه بقای بار داشته باشیم ضروری است، و هنگامی که آن را در معادلات ماکسول وارد کردیم، این معادلات، معادله پیوستگی را ایجاب می‌کنند، به گونه‌ای که لازم نیست این معادله را به مجموعه معادلات بنیادی بیفزاییم.

انرژی الکترو مغناطیسی

از فصل (۶) می‌دانیم که پتانسیل الکتریسیته ساکن دستگاه بارهایی که میدان الکتریکی مربوط را ایجاد می‌کنند برابر است با:

$$U_E=\frac{1}{2}\int_V \vec{E}.\vec{D}dV \qquad (۷-۱۶)$$

و از فصل (۱۲)، کمیت زیر

$$U_M=\frac{1}{2}\int_V \vec{H}.\vec{B}dV \qquad (۸-۱۶)$$

را به عنوان انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی می‌دانیم. با استفاده از این دو عبارت در وضعیتهای غیرساکن بدست می‌آوریم:

Physicsclass.blogsky.com

$$\vec{\nabla}.(\vec{E}\times\vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\vec{E}.\vec{D}+\vec{B}.\vec{H}) - \vec{J}.\vec{E} \qquad (۹-۱۶)$$

این رابطه بیان کننده پایستگی موضعی انرژی در هر نقطه است. اگر علامتهای اختصاری زیر را بکار ببریم:

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \qquad (۱۰-۱۶)$$

$$u = \frac{1}{2}(\vec{E}.\vec{D}+\vec{B}.\vec{H}) \qquad (۱۱-۱۶)$$

در نتیجه در هر نقطه معادله زیر برقرار است:

$$\vec{\nabla}.\vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J}.\vec{E} \qquad (۱۲-۱۶)$$

$\vec{J}.\vec{E}$ کاری است که میدان موضعی روی ذرات باردار در واحد حجم انجام می‌دهد و u چگالی انرژی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی است. اگر $\vec{\nabla}.\vec{S} = 0$ باشد، در آن صورت معادله (۱۶-۱۲) بقای موضعی انرژی را بیان خواهد کرد، در واقع در هر نقطه، آهنگ تغییر انرژی میدان برابر است با اتلاف توان در واحد حجم. اگر $\vec{\nabla}.\vec{S} \neq 0$ ولی $\vec{J}.\vec{E} = 0$ باشد (برای مثال در یک محیط نارسانا)، آنگاه

$$\vec{\nabla}.\vec{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad (۱۳-۱۶)$$

این معادله از نظر ریاضی دقیقاً همانند معادله پیوستگی بار الکتریکی است.

معمولاً خود بردار $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ را به عنوان جریان موضعی انرژی در واحد زمان در واحد سطح در نظر می‌گیرند.

معادله موج

یکی از مهم‌ترین پیامدهای معادلات ماکسول، معادلات انتشار موج الکترومغناطیسی در محیط خطی است. معادله موج برای $\vec{H}$ را می‌توان با گرفتن تاو از معادله (۱۶-۳) به دست آورد:

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \qquad (۱۴-۱۶)$$

با گرفتن تاو از معادله (۱۶-۴) و محدود کردن کاربرد معادله به فضای تهی از بار آزاد به طوری که $\vec{\nabla}.\vec{D} = 0$ باشد، نتیجه خواهد شد:

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (۱۵-۱۶)$$

میدان الکترومغناطیسی در یک محیط خطی و همگن که چگالی بار در آن صفر است، خواه محیط رسانا باشد خواه نارسانا، از معادلات موجی که در بالا به‌دست آمد پیروی می‌کند. با وجود این، تنها کافی نیست که میدان در این معادلات صدق کند، بلکه باید در معادلات ماکسول نیز صادق باشد. در حل معادلات موج، باید مخصوصاً دقت کرد که پاسخهایی برای معادلات ماکسول به‌دست آوریم.

امواج تکفام

امواج تکفام را می‌توان به‌صورت امواجی توصیف کرد که در آن تمام میدانها با یک فرکانس منفرد مشخص می‌شوند. در آن صورت می‌توان $\vec{E}$ را از حل معادله (۱۶-۱۵) به‌دست آورد و سپس با استفاده از معادلات ماکسول و معادلات ساختمندی میدانهای دیگر را به‌دست آورد. برای انجام این کار، روشهای تحلیل متغیرهای مختلط بسیار مناسب‌اند، بستگی زمانی میدان به صورت e^{-iwt} فرض می‌شود، بنابراین:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-iwt} \qquad (۱۶-۱۶)$$

و با قرار دادن آن در معادله موج $\vec{E}$ خواهیم داشت:

$$e^{-iwt}\left[\nabla^2\vec{E} + w^2\varepsilon\mu\vec{E} + iwg\mu\vec{E}\right] = 0 \qquad (۱۷-۱۶)$$

این معادله‌ای است که تغییرات فضایی میدان الکتریکی باید از آن پیروی کند.

با فرض اینکه «محیط» فضای تهی است، به‌طوری که $g=0$، $\mu=\mu_0, \varepsilon=\varepsilon_0$ و به علاوه فرض اینکه $\vec{E}(\vec{r})$ تنها در یک راستا، برای مثال در راستای z، تغییر می‌کند و به y, x بستگی ندارد، معادله بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2\vec{E}(z)}{dz^2} + \left(\frac{w}{c}\right)^2\vec{E} = 0 \quad , \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \qquad (۱۸-۱۶)$$

این معادله (که به معادله هلمهولتز معروف است) از نظر ریاضی با معادله نوسانگر هماهنگ یکسان است و پاسخهای این معادله عبارت‌اند از:

$$\vec{E}(z) = E_0 e^{\pm ikz} \qquad (۱۹-۱۶)$$

که در آن E_0 بردار ثابتی است و $k = \frac{w}{c}$. بنابراین پاسخ کامل به صورت زیر است:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 e^{-i(wt \mp kz)} \qquad (۲۰-۱۶)$$

و با گرفتن قسمت حقیقی آن داریم:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\cos(wt \pm kz),$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0\cos w\left(t \pm \frac{z}{c}\right) \qquad (۲۱-۱۶)$$

این معادله نمایانگر یک موج سینوسی است که در راستای z به سمت راست یا به سمت چپ (بسته به آنکه کدام یک از دو علامت مثبت یا منفی به‌کار گرفته شوند) حرکت می‌کند. سرعت انتشار موج c است.

برای یک محیط دی‌الکتریک نارسانای غیرمغناطیسی که $g=0$ و $\varepsilon = K\varepsilon_0$ و $\mu = \mu_0$، بدست می‌آید:

$$k = \sqrt{K}\,\frac{w}{c} \qquad (۲۲-۱۶)$$

اگر n را به صورت $n = \sqrt{K}$ تعریف کنیم، می‌بینیم که نتایج با حالت مربوط به خلاء یکسان‌اند بجز آنکه اکنون سرعت انتشار موج به جای c برابر است با $\frac{c}{n}$. کمیت n ضریب شکست محیط دی‌الکتریک نامیده می شود.

اگر محیط رسانا باشد، $g > 0$، جمله سوم در معادله (۱۶-۱۷) را باید نگه داریم. هنگامی که g کوچک است، جمله سوم این معادله در مقایسه با جمله دوم آن که به پاسخ موجی منجر شد، کوچک باشد، به عبارت دیگر

$$wg\mu \ll w^2\varepsilon\mu \Rightarrow g \ll w\varepsilon \qquad (۲۳-۱۶)$$

نتیجه صرفاً آن خواهد بود که موج میرا می‌شود.

Physicsclass.blogsky.com

هنگامی که $g >> \varepsilon w$ باشد می‌توانیم از جمله دوم معادله (۱۶-۱۷) چشم‌پوشی کنیم. اگر توجه خود را به مورد یک بعدی محدود کنیم، خواهیم داشت:

(۱۶-۲۴)
$$\frac{d^2E(z)}{d^2z}+iwg\mu E=0$$

چنانچه فرض کنیم $\alpha = iw$ حقیقی باشد یا، به بیان دیگر، اگر فرض کنیم فرکانسی موهومی باشد، ضریب E در جمله دوم حقیقی خواهد بود. در آن صورت اگر $k=\sqrt{\alpha g\mu}$، بستگی فضایی پاسخ، $E(r)$ به صورت زیر است:

(۱۶-۲۵)
$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(r)e^{-\alpha t}$$

گذار بین رفتار موجی و رفتار کاهش یابنده هنگامی رخ می‌دهد که

(۱۶-۲۶)
$$|w|=|\alpha|\approx\left|\frac{g}{\varepsilon}\right|=\frac{1}{t_c}$$

که t_c همان زمان واهلش ماده است.

شرایط مرزی

شرایط مرزی که میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در فصل مشترک دو محیط باید در آنها صدق کنند درست مانند حالت ساکن، از معادلات ماکسول استنتاج می‌شوند.

با استفاده از معادله ماکسول زیر می‌توان نشان داد که:

(۱۶-۲۷)
$$\vec{\nabla}.\vec{B}=0\Rightarrow B_{1n}=B_{2n}$$

با استفاده از معادله ماکسول زیر، صورت دیفرانسیلی قانون الکترومغناطیسی فاراده، می‌توان نشان داد که مؤلفه مماسی $\vec{E}$ در فصل مشترک دو محیط پیوسته است:

(۱۶-۲۸)
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0\Rightarrow E_{1t}=E_{2t}$$

و با توجه به معادله تعمیم قانون گاوس می‌توان به نتیجه زیر رسید:

(۱۶-۲۹)
$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\rho\Rightarrow(D_{1n}-D_{2n})=\sigma$$

که در آن σ چگالی بار سطحی در فصل مشترک است.

با توجه به اینکه بار الکتریکی باید بقا داشته باشد، به نتیجه زیر می‌رسیم:

(۱۶-۳۰)
$$\vec{\nabla}.\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\Rightarrow J_{1n}-J_{2n}=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

اگر تنها تابش تکفام را درنظر بگیریم، چگالی بار سطحی باید به صورت e^{-iwt} تغییر کند، با بکار بردن روابط ساختمندی $\vec{J}=g\vec{E},\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ معادله‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند:

(۱۶-۳۱)
$$\begin{cases}\varepsilon_1E_{1n}-\varepsilon_2E_{2n}=\sigma\\ g_1E_{1n}-gE_{2n}=iw\sigma\end{cases}$$

چند مورد جالب عملی را می‌توان مورد توجه قرار داد. اگر σ مساوی صفر باشد، آنگاه

(۱۶-۳۲)
$$\frac{\varepsilon_1}{g_1}=\frac{\varepsilon_2}{g_2}$$

که این رابطه می‌تواند یا برای موادی که به طور مناسب انتخاب شده‌اند و یا چنانچه g_1, g_2 هر دو صفر یا بینهایت باشند، صادق باشد.

اگر σ صفر نباشد، که شاید هم اینطور باشد، در این صورت می‌توان آن را از معادلات (۱۶-۳۱) حذف کرد، بنابراین:

(۱۶-۳۳)
$$(\varepsilon_1+i\frac{g_1}{w})E_{1n}-(\varepsilon_2+i\frac{g_2}{w})E_{2n}=0$$

آخرین مورد جالبی که اتفاق می‌افتد، هنگامی است که یکی از رسانندگیها، مثلاً g_2 بینهایت است. در این مورد E_{2n} باید صفر و E_{1n} باید مساوی $\frac{\sigma}{\varepsilon_1}$ شود تا این معادلات صادق باشند.

با استفاده از معادله ماکسول زیر:

(۱۶-۳۴)
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{J}\Rightarrow H_{1t}-H_{2t}=j_\perp$$

که در آن $j_\perp$ آن مؤلفه از چگالی جریان سطحی است که بر امتداد آن مؤلفه از $\vec{H}$ که در معادله ظاهر می‌شود عمود است. چگالی جریان سطحی نشان دهنده یک جریان متناهی در یک لایه سطحی بینهایت نازک است. بجز در موردی که رسانندگی بینهایت باشد، چگالی جریان سطحی صفر است، بنابراین برای رسانندگی غیر بینهایت مؤلفه مماسی $\vec{H}$ پیوسته است:

(۱۶-۳۵)
$$H_{1t}=H_{2t}$$

اگر رسانندگی محیط (۲) بینهایت باشد، در آن صورت همان‌طور که قبلاً نشان دادیم، $E_{2n}=0$.

با درنظر گرفتن معادله ماکسول زیر:

(۱۶-۳۶)
$$\vec{\nabla}\times\vec{H}_2-\frac{\partial\vec{D}_2}{\partial t}=\vec{J}_2$$

و با به کار بردن روابط ساختمندی و با فرض اینکه $\vec{E}_2$ به صورت e^{-iwt} نسبت به زمان تغییر می‌کند، نتیجه خواهد شد:

(۱۶-۳۷)
$$\vec{E}_2=\frac{1}{g_2-iw\varepsilon_2}\vec{\nabla}\times\vec{H}_2$$

در واقع $\vec{E}_2$ در محیطی با رسانندگی بینهایت، صفر می‌شود.

و با توجه به رابطه زیر:

(۱۶-۳۸)
$$\vec{H}_2=\frac{1}{iw\mu_2}\vec{\nabla}\times\vec{E}_2$$

صفر شدن $\vec{E}_2$ ایجاب می‌کند که $\vec{H}_2$ نیز صفر شود. در این صورت شرط مرزی روی مؤلفه مماسی $\vec{H}$ در فصل مشترک دو محیط رسانندگی یکی از آنها بینهایت است، عبارت خواهد بود از:

(۱۶-۳۹)
$$H_{1t}=j_\perp$$

معادله موج با چشمه‌ها

میدانهای $\vec{B},\vec{E}$ را می‌توان از توابع پتانسیل به‌دست آورد.

(۱۶-۴۰)
$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\ ,\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

چنانچه شرط لورنتس

(۱۶-۴۱)
$$\vec{\nabla}.\vec{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

اعمال شود، پتانسیلها در معادلات موج غیر همگن زیر صدق می‌کنند:

Physicsclass.blogsky.com

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \qquad (۱۶-۴۲)$$

این پتانسیلها امواج الکترومغناطیسی ناشی از توزیع بار و توزیع جریان از پیش مشخص شده را تعیین می‌کنند. پاسخهای خاص این معادلات (در خلاء) عبارتند از:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \qquad (۱۶-۴۳)$$

که در آن $t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$، زمان تأخیری نامیده می‌شود. این پتانسیلها، پتانسیلهای تأخیری نامیده می‌شوند.

تعبیر فیزیکی پتانسیلهای تأخیری جالب است. این معادلات نشان می‌دهند که در یک نقطه مشخص r در یک زمان معین t، پتانسیلها را بارها و جریانهایی که در زمانهای پیشتر t' در سایر نقاط فضا r' وجود داشته‌اند، تعیین می‌کنند.

فرض کنید که $\varphi, \vec{A}$ انتخاب خاصی برای توزیع توابع پتانسیل‌اند که میدانهای صحیح $\vec{B}, \vec{E}$ را به دست می‌دهند. در این صورت، چنانچه ما پتانسیلهای جدید زیر را انتخاب کنیم:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\xi \ , \ \varphi' = \varphi - \frac{\partial \xi}{\partial t} \qquad (۱۶-۴۴)$$

(تابع ξ یک تابع کاملاً اختیاری است) دقیقاً همان میدانهای $\vec{B}, \vec{E}$ را به دست خواهند داد. این تغییر در پتانسیلهای جدیدی که از نظر فیزیکی معادل‌اند، تبدیل پیمانه‌ای نامیده می‌شود.

با قرار دادن φ', A' در معادله (۱۶-۴۱)، معادله موج نرده‌ای زیر را برای ξ به‌دست می‌آید:

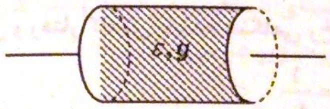
$$\nabla^2 \xi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t} = -(\vec{\nabla}.\vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t}) \qquad (۱۶-۴۵)$$

بنابراین، چنانچه پتانسیلهای اصلی در شرط لورنتس صدق کنند، پتانسیلهای جدید نیز صدق خواهند کرد. مشروط بر آنکه ξ در معادله موج نرده‌ای همگن صدق کند. اگر $\varphi, \vec{A}$ی اصلی در شرط لورنتس صدق نکنند، بازهم می‌توانیم پتانسیلهای جدیدی انتخاب کنیم که در این شرط صدق کنند که در آن صورت ξ باید به صورت پاسخ معادله موج نرده‌ای غیر همگن انتخاب شود.

مسائل فصل شانزدهم

۱۶-۱- ناحیهٔ بین صفحات دایروی متوازی یک خازن از دی‌الکتریکی با گذردهی ε پر شده است. دی‌الکتریک ناکامل است و رسانندگی آن g است. ظرفیت این خازن C است. این خازن را با اختلاف پتانسیل $\Delta\varphi$ باردار و سپس آن را از این اختلاف پتانسیل قطع می‌کنیم. (الف) بار روی خازن را بر حسب تابعی از زمان به دست آورید. (ب) جریان جابه‌جایی در دی‌الکتریک را پیدا کنید. (ج) میدان مغناطیسی در دی‌الکتریک را به دست آورید.

حل:



گذردهی دی الکتریک ε است. دی الکتریک نا کامل است و رسانندگی آن g است.

الف) با روی خازن بر حسب زمان:

$$\vec{\nabla}.\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ , \ \vec{J} = g\vec{E} \ , \ \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$g\vec{\nabla}.\vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \rho \Rightarrow \varepsilon\vec{\nabla}.\vec{E} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (۲)$$

$$(1),(2) \Rightarrow g\vec{\nabla}.\vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{g\rho}{\varepsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{g\rho}{\varepsilon} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\ln\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{g}{\varepsilon}t \ \Rightarrow \ \rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}$$

چگالی بار نسبت به زمان به این صورت رفتار می‌کنند و به حالت تعادل الکتروستاتیکی نزدیک می‌شود.

$$\rho = \frac{Q}{V} \ \Rightarrow \ Q = Q_0 e^{\frac{-g}{\varepsilon}t} \ , \quad \frac{Q_0}{\Delta Q_0} = C \ \Rightarrow \ Q_0 = C\Delta\varphi_0$$

چگالی حجمی بار آزاد از پیش تعیین شده آن برابر ρ_0 است.

اگر این دستگاه رسانا را ناگهان از میدانهای الکتریکی وارد بر آن جدا کنیم، به سمت وضع تعادل که در آن هیچ بار اضافی در درون دستگاه وجود ندارد گرایش می‌یابد.

$$Q = C\Delta\varphi_0 e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}$$ (تغییرات بار روی خازن بر حسب زمان)

ب) جریان جابه‌جایی در دی الکتریک:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \ , \ \vec{E} = \frac{\Delta\varphi}{d}$$

$$\frac{Q}{C} = \Delta\varphi_0 e^{\frac{-g}{\varepsilon}t} \Rightarrow \Delta\varphi = \Delta\varphi_0 e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}$$ (تغییرات φ نسبت به زمان)

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\Delta\varphi_0}{d} e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}$$

$$D = \varepsilon E = \varepsilon(\frac{\Delta\varphi_0}{d} e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}) \Rightarrow J_D = \frac{dD}{dt} = \frac{\varepsilon}{d}\Delta\varphi_0(\frac{-g}{\varepsilon})e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}$$

physicsclass.blogsky.com

$$= \frac{-g\Delta\varphi_0 e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}}{d}$$

(چگالی جریان جابه‌جایی)

$$J_D = \frac{-g\Delta\varphi_0}{d} e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}$$

(جریان جابه‌جایی)

$$I_D = J_D A = \frac{-gA}{d}\Delta\varphi_0 e^{\frac{-g}{\varepsilon}t} \quad (C=\varepsilon\frac{A}{d}) \quad \frac{-gC}{\varepsilon}\Delta\varphi_0 e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}$$

ج) میدان مغناطیسی:

$$\vec{J} = g\vec{E} = \frac{g\Delta\varphi_0}{d}e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}, \quad J_D = \frac{-g\Delta\varphi_0}{d}e^{\frac{-g}{\varepsilon}t}$$

چون رسانندگی وجود دارد یک جریان (عکس‌العمل محیط نسبت به E) را داریم. (جریان القایی)

چون میدان متغیر با زمان داریم، یک چگالی جریان جابه‌جایی داریم.

$$\oint_C \vec{H}.\vec{dl} = (J+J_D)A \Rightarrow B = 0$$

بنابراین میدان مغناطیسی داخل دی‌الکتریک صفر است.

۱۶-۲- برای یک محیط دی‌الکتریک، Q به صورت نسبت چگالی جریان جابه‌جایی به چگالی جریان رسانایی تعریف می‌شود. برای انتشار موج تکفام، این کمیت به $Q = w\varepsilon/g$ تبدیل می‌شود. برای کوارتز و گوگرد Q را در فرکانسهای $f = 1, 10^6, 10^9\ Hz$ به دست آورید.

حل: برای یک محیط دی الکتریک Q برابر است با:

$$Q = \frac{J_D}{J} = \frac{\frac{dD}{dt}}{gE} = \frac{\frac{\varepsilon dE}{dt}}{gE}$$

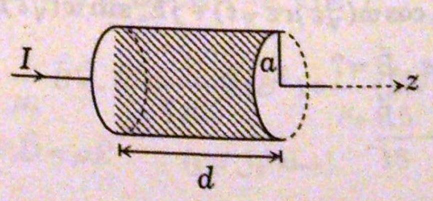
برای انتشار موج تکفام:

$$E(r,t) = E(r)e^{-iwt} \Rightarrow Q = \frac{\varepsilon}{gE}(-iw)e^{-iwt}E(r)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\varepsilon w}{g}$$

۱۶-۳- دو صفحه مسطح دایره‌ای به شعاع a که به فاصله d از یکدیگر قرار دارند، یک خازن ایده‌آل تشکیل می‌دهند: فرض کنید که دی‌الکتریک خازن عایقی کامل و میدان Dی یکنواخت است (یعنی از میدان حاشیه‌ای در لبهٔ صفحات چشمپوشی کنید). خازن با جریان ثابت I در حال باردار شدن است. (الف) میدان H را در نقطه P روی سطح استوانه‌ای دی‌الکتریک پیدا کنید. (ب) اندازه و جهت بردار پوئین‌تینگ S را در نقطه P پیدا کنید. (پ) از $S.n$ روی سطح استوانه‌ای دی‌الکتریک انتگرال بگیرید، و نشان دهید که نتیجه برابر است با آهنگ زمانی تغییر انرژی الکترواستاتیک ذخیره شده در خازن.

حل:



دی‌الکتریک خازن عایقی کامل است:

بنابراین جریان القایی حاصل از عمل میدان الکتریکی بر روی دی الکتریک، صفر می‌شود.

$$g = 0 \Rightarrow \vec{J} = g\vec{E} = 0$$

الف)

(قانون تعمیم یافته آمپر)

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D$$

اگر C_1 سطح مفروض باشد:

$$\oint_{C_1} \vec{H}.\vec{dl} = \int_{S_1} (0+\vec{J}_D).\hat{n}\,da$$

از تقارن استوانه‌ای H به φ بستگی ندارد، بنابراین:

$$H2\pi a = \frac{\partial D}{\partial t}\pi a^2 \Rightarrow \vec{H} = \frac{a}{2}\frac{\partial D}{\partial t}\hat{\varphi} \quad (1)$$

اگر سطح ما C_2 باشد:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J} + \vec{J}_D = \vec{J} + 0$$

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (E=0 \text{ در داخل فلز})$$

$$\oint_{C_2} \vec{H}.\vec{dl} = \int_{S_2} \vec{J}.\hat{n}\,da = I \Rightarrow H2\pi a = I\hat{\varphi} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi a}\hat{\varphi} \quad (2)$$

(۱)، (۲) باید مساوی باشند، بنابراین:

$$\vec{H} = \frac{a}{2}\frac{\partial D}{\partial t}\hat{\varphi} = \frac{I}{2\pi a}\hat{\varphi}$$

ب) اندازه و جهت بردار پوئین تینگ s در p:

میدان الکتریکی در جهت جریان و در جهت محور z ها است.

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{D}{\varepsilon}\frac{a}{2}\frac{\partial D}{\partial t}\hat{k}\times\hat{\varphi} = \frac{-Da}{2\varepsilon}\frac{\partial D}{\partial t}\hat{\rho}$$

$$\vec{s} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{D}{\varepsilon}\hat{k}\times\frac{I}{2\pi a}\hat{\varphi} = \frac{-DI}{2\pi a\varepsilon}\hat{\rho}$$

ج)

$$\oint_{s\ \text{سطح استوانه‌ای}} \vec{s}.\hat{n}\,da = \int_{s_1}\vec{s}.\hat{n}_1\,da + \int_{s_2}\vec{s}.\hat{n}_2\,da + \int_{s_3}\vec{s}.\hat{n}_3\,da$$

و با توجه به اینکه $\hat{n}_1.\hat{\rho} = 0$ ، $\hat{n}_2.\hat{\rho} = 0$ ، $\hat{n}_3 = \hat{\rho}$ است، داریم:

$$\oint_s \vec{S}.\hat{n}\,da = 0+0+\int_{s_3}\vec{S}.\hat{n}_3\,da = \frac{-Da}{2\varepsilon}\frac{\partial D}{\partial t}(2\pi a d) \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int \vec{E}.\vec{D}dV\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\frac{\vec{D}}{\varepsilon}.\vec{D}dV = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2\varepsilon}\int D^2 dV$$

چون D^2 در حجم V یکنواخت است از زیر انتگرال بیرون می‌آید، بنابراین:

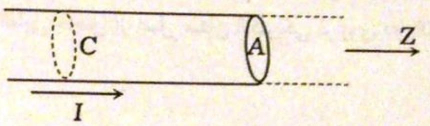
$$\frac{\partial u_E}{\partial t} = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial D^2}{\partial t}\int dV = \frac{D}{\varepsilon}\frac{\partial D}{\partial t}\pi a^2 d \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow -\oint_s \vec{s}.\hat{n}\,da = \frac{\partial u_E}{\partial t}$$

۱۶-۴- یک سیم مستقیم فلزی با رسانندگی g و سطح مقطع A حامل جریان پایای I است. اندازه و جهت بردار پوئین‌تینگ را در روی سطح این سیم به دست آورید. از مؤلفه عمودی بردار پوئین‌تینگ در روی سطح قسمتی از سیم به طول L انتگرال بگیرید و نتیجه را با گرمای ژولی که در این قسمت تولید می‌شود، مقایسه کنید.

Physicsclass.blogsky.com

حل:



چون جریان پایای I داریم، E ثابت است و بنابراین:

$$J_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

$$\oint_c \vec{H}.\vec{dl} = I + I_D = I + 0 \Rightarrow H(2\pi a) = I \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi a}\hat{\varphi}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{g}, \vec{J} = \frac{\vec{I}}{A} = \frac{I}{A}\hat{k} \Rightarrow \vec{E} = \frac{I}{gA}\hat{k}$$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = (\frac{I}{gA})(\frac{I}{2\pi a})\hat{k}\times\hat{\varphi} = \frac{-I}{2\pi a A g}\hat{\rho}$$

$$\int_{s_L} \vec{S}.\hat{n}da = \frac{-I^2}{2\pi a A g}(2\pi a L) = \frac{-I^2 L}{Ag} \quad (1)$$

(سطح سیم به‌طول L)

$$RI^2 = \frac{L}{gA}I^2 \quad (2)$$ (آهنگ تولید گرمای ژول)

$$(1),(2) \Rightarrow -\int \vec{S}.\hat{n}da = RI^2$$

۱۶ – ۵ – فرض کنید که در ناحیه‌ای از فضا یک میدان الکترواستاتیکی و همچنین یک میدان مغناطوستاتیکی وجود دارد. نشان دهید که هر چند که ممکن است بردار پوئین‌تینگ غیر صفر باشد، ولی انتگرال سطحی S.n بر روی هر سطح بسته‌ای واقع در این ناحیه صفر می‌شود.

حل:

$$\frac{\partial E}{\partial t}=0, \frac{\partial B}{\partial t}=0$$

$$\oint_s \vec{s}.\hat{n}da = \int \vec{\nabla}.\vec{s}\,dV = \int \vec{\nabla}.(\vec{E}\times\vec{H})dV$$

$$= \int \vec{H}.\vec{\nabla}\times\vec{E}\,dV - \int \vec{E}.\vec{\nabla}\times\vec{H}\,dV$$

چون: $\frac{\partial B}{\partial t}=0, \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \Rightarrow$ انتگرال اول $=0$

اگر فرض کنیم: $J=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0 \Rightarrow$ انتگرال دوم $=0$

ولی اگر H را به صورت یکنواخت نسبت به فضا درنظر بگیریم، $\vec{\nabla}\times\vec{H}=0$ است و این H یکنواخت بردار s غیر صفر ایجاد می‌کند.

نکته: اگر در ناحیه‌ای در فضا یک میدان الکتروستاتیکی و یک میدان مغناطوستاتیکی وجود داشته باشد، ممکن است که بردار پوئین تنیگ s غیر صفر باشد ولی انتگرال سطحی $\oint_s \vec{S}.\hat{n}da$ روی هر سطح بسته‌ای واقع در این ناحیه صفر شود.

۱۶ – ۶ – معادلهٔ موج یک بعدی زیر داده شده است

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

که در آن E اندازهٔ بردار میدان الکتریکی است. فرض کنید E در امتداد یک جهت ثابت، مثل جهت y، باشد. با تغییر متغیرهای زیر

$$\xi = t+\sqrt{\varepsilon\mu}z, \eta = t-\sqrt{\varepsilon\mu}z$$

نشان دهید که معادلهٔ موج به صورت ساده‌ای در می‌آید که می‌توان به سادگی از آن انتگرال گرفت. از معادلهٔ موج انتگرال بگیرید تا نتیجه زیر حاصل شود.

$$E(z,t)=E_1(\xi)+E_2(\eta)$$

که در آن E_1 و E_2 توابع دلخواهی هستند.

حل:

معادله موج یک‌بعدی : $\frac{\partial^2 E}{\partial Z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

$$E(z,t)=E_1(\xi)+E_2(\eta) \quad \xi=t+\sqrt{\varepsilon\mu}z \;, \eta=t-\sqrt{\varepsilon-\mu}\,z$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{\partial E_1}{\partial\xi}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial E_1}{\partial\xi}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\partial^2 E}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{dz}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_1}{\partial\xi^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_1}{\partial\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial^2 E_1}{\partial\xi^2} \quad (2)$$

با جایگذاری روابط (۱),(۲) داریم:

$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_1}{\partial\xi^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_1}{\partial\xi^2} \Rightarrow$ (E_1 در معادله موج صادق است) (۳)

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = \frac{\partial E_2}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial z} = -\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\partial E_2}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} = -\sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 E_2}{\partial\eta^2}\frac{\partial z}{\partial\eta} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_2}{\partial\eta^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{\partial E_2}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial E_2}{\partial\eta} \;,\; \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_2}{\partial\eta^2} \quad (5)$$

با جایگذاری روابط (۴),(۵) داریم:

$\varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_2}{\partial\eta^2} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_2}{\partial\eta^2} \Rightarrow$ (E_2 در معادله موج صادق است) (۶)

(یک جواب برای معادله موج گفته شده است) $(3),(6) \Rightarrow E(r,t)=E_1+E_2$

۱۶ – ۷ – موج الکترومغناطیسی زیر داده شده است

$$E=iE_0\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)+jE_0\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)$$

که در آن E_0 مقدار ثابتی است. میدان مغناطیسی و بردار پوئین‌تینگ آن را پیدا کنید.

حل:

$$\vec{E}=\hat{i}E_0\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)+\hat{j}E_0\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)$$

$$E_0 = Cte \;, \vec{B} = ?$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Physicsclass.blogsky.com

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_\circ\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t) & E_\circ\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}\,z-t) & \circ\end{vmatrix}$$

$$=-\hat{i}\,wE_\circ\sqrt{\varepsilon\mu}\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}\,z-t)$$

$$+\hat{j}(-E_\circ w\sqrt{\varepsilon\mu}\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}\,z-t)+\hat{k}(\circ)$$

بنابراین:

$$+\hat{i}\,ewE_\circ\sqrt{\varepsilon\mu}\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)$$

$$+\hat{j}(E_\circ w\sqrt{\varepsilon\mu}\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)=-\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{B}=\frac{+\hat{i}\,wE_\circ\sqrt{\varepsilon\mu}}{-w}\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)$$

$$+\frac{\hat{j}E_\circ w\sqrt{\varepsilon\mu}}{w}\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}\,z-t)$$

$$\vec{B}=-\hat{i}E_\circ\sqrt{\varepsilon\mu}\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)+\hat{j}E_\circ\sqrt{\varepsilon\mu}\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)$$

$$\vec{S}=?\quad\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\vec{S}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ E_\circ\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t) & E_\circ\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t) & \circ\\ \frac{E_\circ}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\sin w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t) & \frac{E_\circ}{\mu}\sqrt{\varepsilon\mu}\cos w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t) & \circ\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}(\circ)+\hat{j}(\circ)+\hat{k}\left[E_\circ^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos^2 w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)\right.$$

$$\left.-E_\circ^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sin^2 w(\sqrt{\varepsilon\mu}z-t)\right]$$

۱۶-۸ - با شروع از عبارتی برای نیروی وارد بر واحد حجم در ناحیه‌ای از خلأ که حاوی بارها و جریانهایی است

$$F_v=\rho E+J\times B$$

و با استفاده از معادلات ماکسول و اتحاد برداری معادلهٔ (۱۴-۲۴)، نشان دهید

$$F_v=-\varepsilon_\circ\frac{\partial}{\partial t}(E\times B)+\varepsilon_\circ E\nabla.E-\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\nabla(E^2)+\varepsilon_\circ(E.\nabla)E$$

$$+\frac{1}{\mu_\circ}B\nabla.B-\frac{1}{2\mu_\circ}\nabla(B^2)+\frac{1}{\mu_\circ}(B.\nabla)B$$

(کمیت $\varepsilon_\circ E\times B$ گاهی چگالی اندازه حرکت میدان الکترومغناطیسی نامیده می‌شود.)

حل: در ناحیه‌ای از خلاء که حاوی بارها و جریانها است، نیروی وارد بر واحد حجم:

$$\vec{F}_V=\rho\vec{E}+\vec{J}\times\vec{B}\qquad\rho\neq\circ\ ,\quad J=\circ$$

$$F_V=-\varepsilon_\circ\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})+\varepsilon_\circ\vec{E}\vec{\nabla}.\vec{E}-\frac{1}{2}\varepsilon_\circ\vec{\nabla}(E^2)$$

$$+\varepsilon_\circ(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}+\frac{1}{\mu_\circ}\vec{B}\vec{\nabla}.\vec{B}-\frac{1}{2\mu_\circ}\vec{\nabla}(B^2)+\frac{1}{\mu_\circ}(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$\vec{E}\varepsilon_\circ\vec{\nabla}.\vec{E}=\vec{E}\nabla.\vec{D}=\rho\vec{E}\qquad\text{(جمله اول نیرو)}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=\circ$$

$$-\varepsilon_\circ\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t}=-\varepsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}-\varepsilon_\circ\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad(1)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{J}+\varepsilon_\circ\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\qquad(2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad(3)$$

با جایگذاری روابط (۲)،(۳) در رابطه (۱) داریم:

$$-\varepsilon_\circ\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})=-\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}-\vec{J}\right]\times\vec{B}+\varepsilon_\circ\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$=-\vec{\nabla}\times\vec{H}\times\vec{B}+\vec{J}\times\vec{B}+\varepsilon_\circ\vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{\mu_\circ}\vec{\nabla}\times\vec{B}\times\vec{B}$$

$$+\vec{J}\times\vec{B}+\varepsilon_\circ\vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{1}{\mu_\circ}\vec{B}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}+\vec{J}\times\vec{B}$$

$$+\varepsilon_\circ\vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=\frac{1}{\mu_\circ}\left[\vec{\nabla}(\frac{1}{2}B^2)-(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}\right]+\vec{J}\times\vec{B}$$

$$+\varepsilon_\circ\left[\vec{\nabla}(\frac{1}{2}E^2)-(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}\right]$$

بنابراین:

$$\vec{J}\times\vec{B}=-\varepsilon_\circ\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{1}{\mu_\circ}\vec{\nabla}(\frac{1}{2}B^2)+\frac{1}{\mu_\circ}(\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{B}$$

$$-\varepsilon_\circ\vec{\nabla}(\frac{1}{2}E^2)+\varepsilon_\circ\vec{E}(\vec{E}.\vec{\nabla})$$

$$\vec{B}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=?$$

$$\vec{F}\times\vec{\nabla}\times\vec{G}+\vec{G}\times\vec{\nabla}\times\vec{F}+(\vec{F}.\vec{\nabla})\vec{G}+\vec{F}(\vec{\nabla}.\vec{G})=\vec{\nabla}(\vec{F}.\vec{G})$$

$$2\vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}+2(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}=\vec{\nabla}(E^2)$$

$$\vec{E}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{\nabla}(\frac{1}{2}E^2)-(\vec{E}.\vec{\nabla})\vec{E}$$

۱۶-۹ - یک موج تخت با E_x و B_y مشخص شده است و در جهت مثبت z انتشار می یابد

$$E=iE_\circ\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)$$

(الف) نشان دهید که می‌توان پتانسیل نرده‌ای φ را مساوی صفر گرفت. (ب) یک پتانسیل برداری A پیدا کنید که برای آن شرط لورنتس صادق باشد.

حل:

$$\vec{E}=\hat{i}E_\circ\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)$$

(جهت انتشار موج، جهت مثبت محور z هاست)

مفروضات: $\varphi=\circ$، $\vec{\nabla}.\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\circ$، شرط لورنتس، برای $\vec{A}$ صادق باشد.

$$\vec{A}=?\qquad\vec{\nabla}.\vec{B}=\circ\Rightarrow\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{A}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left[\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right]=\circ$$

$$\Rightarrow\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{\nabla}\varphi\Rightarrow\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow-\hat{i}E_\circ Sin\frac{2\pi}{\lambda}(z-Ct)=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Physicsclass.blogsky.com

$$\Rightarrow \bar{A} = +\hat{i}E_0\left(\frac{-\lambda}{2\pi C}\right)\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-Ct)$$

$$\bar{A} = \frac{-\hat{i}E_0\lambda}{2\pi C}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-Ct)$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}.\bar{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-E_0\lambda}{2\pi C}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-Ct)\right) = 0$$

در این شرط، شرط لورنتس که در اینجا همان شرط کولن، $\bar{\nabla}.\bar{A}=0$، است، نیز صادق است.

۱۶–۱۰– نشان دهید در خلأ با $\rho=0$ و $J=0$، معادلات ماکسول به طور صحیحی تنها از یک تابع برداری A که در معادلات زیر صدق کند، به دست می‌آیند.

$$\nabla.A=0 \quad \nabla^2 A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=0$$

پیمانه‌ای که در آن $\nabla.A=0$ باشد پیمانهٔ کولن نامیده می‌شود.

حل:

$$\rho=0 \quad , \quad J=0 \qquad (1)$$

$$\bar{\nabla}.\bar{A}=0 \qquad (2) \qquad \text{(پیمانه کولن)}$$

(۳) (معادله موج A در خلاء با $J=0$)

$$\nabla^2 A-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=0$$

(۴) پیمانه لورنتس: $\bar{\nabla}.\bar{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,(2)\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$

(۵) معادله موج برای φ: $\nabla^2\varphi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{-\rho}{\varepsilon},(1),(4)\Rightarrow\nabla^2\varphi=0$

$$\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}\ ,\ \bar{E}=-\bar{\nabla}\varphi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}.\bar{B}=0\Rightarrow\bar{\nabla}.\bar{\nabla}\times\bar{A}=0$$

(با توجه به روابط (۲)،(۵))

$$\bar{\nabla}.\bar{D}=\varepsilon\bar{\nabla}.\bar{E}=\varepsilon\bar{\nabla}.\left(-\bar{\nabla}\varphi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)=-\varepsilon\nabla^2\varphi-\varepsilon\frac{\partial(\bar{\nabla}.\bar{A})}{\partial t}=0$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E}=\bar{\nabla}\times\left(-\bar{\nabla}\varphi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\bar{\nabla}\times\bar{A}=-\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{H}=\frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{1}{\mu_0}\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A}=\frac{1}{\mu_0}\left[\bar{\nabla}(\bar{\nabla}.\bar{A})-\nabla^2\bar{A}\right]$$

$$\underset{=}{(2)}-\frac{1}{\mu_0}\nabla^2\bar{A}\underset{=}{(3)}\frac{-1}{\mu_0}\left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{\mu_0 C^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-\varepsilon_0\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

به این دلیل که:

$$\bar{E}=-\bar{\nabla}\varphi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=-\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}$$

$$\underset{=}{(4)}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=-\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}$$

بنابراین:

$$\bar{\nabla}\times\bar{H}=\frac{\partial\bar{D}}{\partial t},J=0 \quad \text{(طبق مسئله)}$$

نکته: در خلاء با $J=0$, $\rho=0$، معادلات ماکسول به طور صحیحی تنها از یک تابع برداری $\bar{A}$ ($\bar{A}$ در پیمانه کولن صادق باشد و در معادله موج خودش با $J=0$ صادق باشد) بدست می‌آیند.

۱۶–۱۱– نشان دهید که در یک محیط خطی رسانا می‌توان پیمانه مناسبی انتخاب کرد به طوری که φ و A هر دو در معادلهٔ موج میرا (۱۶–۲۹) صدق کنند. فرض کنید $\rho=0$ است.

حل:

محیط خطی رسانا: $\bar{J}=g\bar{E}\ ,\ \rho=0$

(۱۶–۲۹): $\nabla^2\bar{E}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{E}}{\partial t^2}-g\mu\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}=0$ (معادله موج میرا)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\nabla}\times\bar{H}=\bar{J}+\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\\ \bar{D}=\varepsilon\bar{E}\\ \bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}\end{array}\right\}\Rightarrow\bar{\nabla}\times\bar{H}=\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\bar{A}=\mu g\bar{E}+\mu\varepsilon\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}$$

$$=\mu g\left(-\bar{\nabla}\varphi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\bar{\nabla}\varphi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)\Rightarrow\bar{\nabla}(\bar{\nabla}.\bar{A})$$

$$-\nabla^2\bar{A}=-\mu g\bar{\nabla}\varphi-\mu g\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}-\mu\varepsilon\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow-\nabla^2\bar{A}+\bar{\nabla}\left[\bar{\nabla}.\bar{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\mu\varphi\right]+\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}+\mu g\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}=0$$

$$\Rightarrow\nabla^2\bar{A}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}-\mu g\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}=0$$

$$\bar{\nabla}.\bar{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\mu\varphi=0 \quad \text{(پیمانه موردنظر)}$$

نکته: در یک محیط خطی رسانا با این پیمانه، $\varphi,\bar{A}$ در معادله موج میرا صادق هستند.

$$\bar{\nabla}.\bar{D}=\rho\overset{\rho=0}{\Rightarrow}\bar{\nabla}.\bar{D}=0\Rightarrow\varepsilon\bar{\nabla}.\bar{E}=0\Rightarrow\varepsilon\bar{\nabla}.\left(-\bar{\nabla}\varphi-\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)=0$$

$$\Rightarrow-\nabla^2\varphi-\frac{\partial\bar{\nabla}.\bar{A}}{\partial t}=0\ ,\ \bar{\nabla}.\bar{A}=-\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\mu\varphi$$

بنابراین:

$$-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}-g\mu\varphi\right)=0\Rightarrow\nabla^2\varphi-\varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-g\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

۱۶–۱۲– محیطی داریم که در آن $\rho=0$ و $J=0$ و $\mu=\mu_0$ است ولی بردار قطبش P به صورت تابعی از مکان و زمان، یعنی $P=P(x,y,z,t)$ داده شده است. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری Z (بردار هرتز) به دست می‌آیند که Z در معادلهٔ زیر صدق می‌کند

$$\nabla^2 Z-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=-\frac{P}{\varepsilon_0}$$

و

$$E=\nabla\times\nabla\times Z-\frac{1}{\varepsilon_0}P,B=\frac{1}{c^2}\nabla\times\frac{\partial Z}{\partial t}$$

physicsclass.blogsky.com

حل:

$\rho=0\ ,\ J=0\ ,\ \mu=\mu_0$

(بردار قطبش در محیط به صورت تابعی از مکان و زمان)

$$\vec{P}=\vec{P}(x,y,z,t)$$

$$\nabla^2\vec{z}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{z}}{\partial t^2}=\frac{-\vec{P}}{\varepsilon_0}*,\ \vec{E}=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{z}-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0},\ \vec{B}=\frac{1}{C^2}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{z}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=\vec{\nabla}.\left[\frac{1}{C^2}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{z}}{\partial t}\right]=\frac{1}{C^2}\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{z}}{\partial t})=0$$

چون دیوژرانس هرکرلی صفر است.

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\vec{\nabla}.(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{E}+\vec{\nabla}.\vec{P}=\varepsilon_0\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{z}-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0})$$

$$+\vec{\nabla}.\vec{P}=0-\vec{\nabla}.\vec{P}+\vec{\nabla}.\vec{P}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{z}-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0})=\vec{\nabla}\times\left[(\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{z})-\nabla^2\vec{z})-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right]\ (1)$$

$$*\Rightarrow\nabla^2\vec{z}=\frac{-\vec{P}}{\varepsilon_0}+\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{z}}{\partial t^2}\qquad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{z})+(\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{z}}{\partial t^2})-\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}\right]=-\frac{1}{C^2}\vec{\nabla}\times\frac{\partial^2\vec{z}}{\partial t^2}$$

$$=-\frac{1}{C^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{z}}{\partial t}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\ \Rightarrow\ \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{C^2}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{z}}{\partial t}\right]$$

$$=\frac{1}{\mu_0C^2}\left[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{z}}{\partial t}\right]$$

$$=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{z})=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}+\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0})=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$ (طبق مسئله: $J=0$)

نکته: معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری $\vec{z}$ (بردار هرتز) بدست می‌آیند، که این z در سه معادله بالا صادق است.

۱۶-۱۳- محیطی داریم که در آن $\rho=0$ و $J=0$ و $\varepsilon=\varepsilon_0$ است ولی بردار مغناطش تابع داده شده‌ای است $[M(x,y,z,t)]$. نشان دهید که معادلات ماکسول به طور صحیح تنها از یک تابع برداری Y که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند، به دست می‌آیند

$$\nabla^2Y-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2Y}{\partial t^2}=-\mu_0M$$

و

$$B=\nabla\times\nabla\times Y,\ E=-\nabla\times\frac{\partial Y}{\partial t}$$

حل:

$\rho=0\quad J=0\quad ,\ \varepsilon=\varepsilon_0$

$\vec{M}=\vec{M}(x,y,z)$ (بردار مغناطش تابعی از مکان و زمان است)

$$\nabla^2\vec{y}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{y}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{M}*,\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{y}\ ,\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}$$

چون دیوژرانس هر کرلی صفر است.

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=\vec{\nabla}.[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{y}]=0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{E}=-\varepsilon_0\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{y}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{M}\right]=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}-\vec{\nabla}\times\vec{M}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}$$

$$\times(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{y})-\vec{\nabla}\times\vec{M}=\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{y})-\nabla^2\vec{y}\right]-\vec{\nabla}\times\vec{M}$$

$$\overset{*}{=}\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{y})+\mu_0\vec{M}-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{y}}{\partial t^2}\right]-\vec{\nabla}\times\vec{M}$$

$$*:\nabla^2\vec{y}=-\mu_0\vec{M}+\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\vec{y}}{\partial t}$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=0+\vec{\nabla}\times\vec{M}-\frac{1}{\mu_0C^2}\vec{\nabla}\times\frac{\partial^2\vec{y}}{\partial t}-\vec{\nabla}\times\vec{M}$$

$$=-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{y}}{\partial t}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

۱۶-۱۴- نشان دهید که معادلات ماکسول را برای محیطی همسانگرد، همگن، نارسانا و بدون بار به وسیله یکی از دو دسته معادلات زیر می‌توان برقرار کرد.

۱. $B=\nabla\times\nabla\times(Fa)$ قسمت حقیقی

$B=\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times(Fa)$ قسمت حقیقی

یا

۲. $B=\nabla\times\nabla\times(Fa)$ قسمت حقیقی

$B=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times(Fa)$ قسمت حقیقی

که در آن a یک بردار یکه ثابت است و F در معادلهٔ نرده‌ای موج صدق می‌کند.

حل:

$$\vec{E}=\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a}),\vec{B}=\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(F\hat{a})$$

محیط نارسانا: $g=0\Rightarrow\vec{J}=g\vec{E}=0$

بدون بار: $\rho=0$

$$\nabla^2F-\varepsilon\mu\frac{\partial^2F}{\partial t^2}=0$$ (F در معادله نرده‌ای موج صادق است)

$$\vec{\nabla}.\vec{B}=\vec{\nabla}.(\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(F\hat{a}))=0$$

$$\vec{\nabla}.\vec{D}=\varepsilon\vec{\nabla}.\vec{E}=\varepsilon\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a}))=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a})\right]=\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.(F\hat{a})-\nabla^2(F\hat{a})\right]$$

$$=-\vec{\nabla}\times(\hat{a}\nabla^2F)$$

Physicsclass.blogsky.com

$$= -\vec{\nabla} \times \left[\hat{a}\varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right] = -\varepsilon\mu\vec{\nabla}\times\frac{\partial^2 (F\hat{a})}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}$$

$$\times(F\hat{a}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu}\varepsilon\mu\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(F\hat{a})$$

$$= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a}) = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a}) \quad , \quad \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(F\hat{a})$$

$\vec{\nabla}.\vec{B} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a})) = 0$ (دیورژانس هرکرلی صفر است)

$$\vec{\nabla}.\vec{D} = \varepsilon\vec{\nabla}.\vec{E} = \varepsilon\vec{\nabla}.(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(F\hat{a})) = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times(F\hat{a})) = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times(F\hat{a})) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times(F\hat{a})\right]$$

$$= \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.(F\hat{a})) - \nabla^2(F\hat{a})\right]$$

F در معادله نرده‌ای موج صدق می‌کند:

$$\nabla^2 F - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 F = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

بنابراین:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.(F\hat{a})) - \varepsilon\mu\hat{a}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right] = -\varepsilon\vec{\nabla}\times\frac{\partial^2 (F\hat{a})}{\partial t^2}$$

$$= \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}\times(F\hat{a})) = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

هر پگاه تکرار کن : مسئولیت زندگیم را بر دوش می گیرم ، قدرت بهتر کردن همه چیز را در خود دارم .همواره حق انتخاب دارم !

یادداشت کن : پشتکار + شکیبایی = هدف

به یاد بسپار : نسبت به همه چیز صبور باش ، اما نسبت به یافتن زندگی خود ، بی صبر

یاداشت کن : در این دنیا فقط باید از یک چیز بترسی ، آن هم ترس است

یادت باشد : مشکلاتت را در پاکتی بگذار که ته آن سوراخ باشد

به خاطر بسپار : می توانی از اشتباهات دیگران بیاموزی ، اما تنها به یاری اشتباهات فردی است که رشد می کنی

Physicsclass.blogsky.com